POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ MATEMATYKI
I NAUK INFORMACYJNYCH

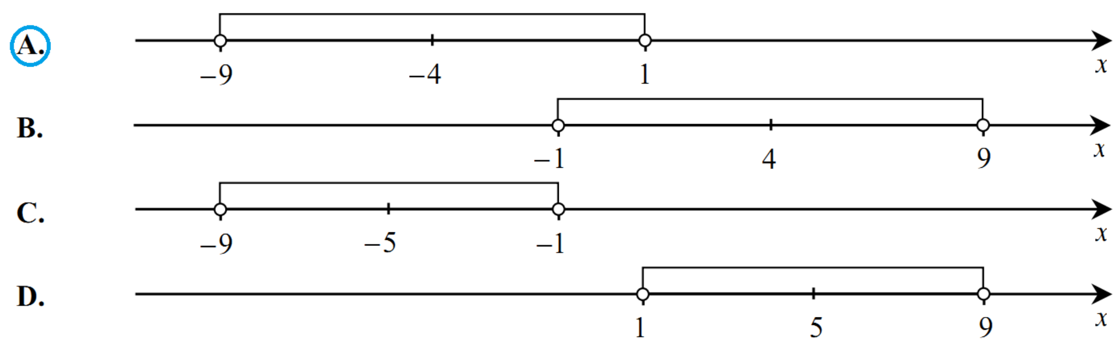
Proponowane rozwiązania
Matura 2013
MATEMATYKA
Poziom podstawowy

Autorzy:
Tomasz Kostrzewa
Agnieszka Piliszek
Wojciech Ożański
Michał Zwierzyński

Warszawa, maj 2013

Zadanie 1. (*1 pkt*)

Wskaż rysunek, na którym zaznaczony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x+4| < 5$.



Rozwiązanie:

Rozwiązujemy nierówność:

$$|x+4| < 5$$

$$x+4 < 5 \quad \wedge \quad x+4 > -5$$

$$x < 1 \quad \wedge \quad x > -9$$

$$x \in (-9;1)$$

Zadanie 2. (*1 pkt*)

Liczby a i b są dodatnie oraz 12% liczby a jest równe 15% liczby b. Stąd wynika, że a jest równe

A. 103% liczby b **B.** 125% liczby b **C.** 150% liczby b **D.** 153% liczby b

Rozwiązanie:

Zachodzi równość:

$$12\%a = 15\%b$$

$$\frac{12}{100}a = \frac{15}{100}b$$

Mnożymy obie strony równości przez $\frac{100}{12}$:

$$a = \frac{15}{100} \cdot \frac{100}{12}b$$

$$a = \frac{15}{12}b$$

$$a = \frac{5}{4}b$$

$$a = 1,25\,b$$

$$a = 125\%\,b$$

Zadanie 3. (*1 pkt*)
Liczba $\log 100 - \log_2 8$ jest równa

A. -2 **B.** -1 **C.**$150\%\ 0$ **D.**$153\%\ 1$

Rozwiązanie:

$$\log 100 - \log_2 8 = \log 10^2 - \log_2 2^3 =$$

Ze wzoru $\log_a b^n = n \log_a b$ mamy:

$$= 2\log 10 - 3\log_2 2 =$$

Z zależności $\log_a a = 1$ otrzymujemy:

$$= 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$$

Zadanie 4. (*1 pkt*)
Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 8x - 6y = 48 \end{cases}$ jest para liczb

A.$x = -3$ i $y = 4$ **B.**$x = -3$ i $y = 6$ **C.**$x = 3$ i $y = -4$ **D.**$x = 9$ i $y = 4$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 3 \quad / \cdot 2 \\ 8x - 6y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 6y = 6 \\ 8x - 6y = 48 \end{cases}$$

Dodajemy stronami:

$$18x = 54$$

$$x = 3$$

Wstawiając $x = 3$ do równania $5x + 3y = 3$ otrzymujemy:

$$15 + 3y = 3$$

$$3y = -12$$

$$y = -4$$

Zatem prawidłowa odpowiedź to $x = 3$ i $y = -4$.

Zadanie 5. (*1 pkt*)

Punkt $A(0, 1)$ leży na wykresie funkcji liniowej $f(x) = (m-2)x + m - 3$. Stąd wynika, że

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Rozwiązanie:

Punkt $A(0, 1)$ leży na wykresie funkcji $f(x)$, gdy

$$f(0) = 1$$

$$1 = (m - 2) \cdot 0 + m - 3$$

$$1 = m - 3$$

$$m = 4$$

Zadanie 6. (*1 pkt*)

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = -3(x - 2)^2 + 4$ jest punkt o współrzędnych

A. $(-2, -4)$ **B.** $(-2, 4)$ **C.** $(2, -4)$ **D.** $(2, 4)$

Rozwiązanie:

Parabola jest już zapisana w postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie (p, q) - wierzchołek paraboli, skąd odczytujemy, że $p = 2$ oraz $q = 4$.

Zadanie 7. (*1 pkt*)

Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $4x^2 - 12x + 9$ jest równe

A. $(4x + 3)(x + 3)$ **B.** $(2x - 3)(2x + 3)$ **C.** $(2x - 3)(2x - 3)$ **D.** $(x - 3)(4x - 3)$

Rozwiązanie:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2$$

Zatem stosując wzór skróconego mnożenia $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ otrzymujemy:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 = (2x-3)(2x-3)$$

Zadanie 8. (*1 pkt*)

Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że

A. $m = -3$ **B.** $m = \frac{2}{3}$ **C.** $m = \frac{3}{2}$ **D.** $m = 3$

Rozwiązanie:

Z warunku prostopadłości prostych o równaniach $y = a_1x + b_1$, $y = a_2x + b_2$ mamy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

$$\frac{2}{m} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

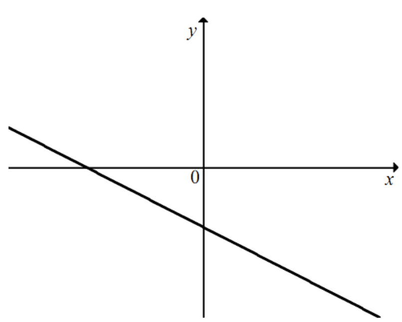
$$-\frac{3}{m} = -1$$

$$-3 = -m$$

$$m = 3$$

Zadanie 9. (*1 pkt*)

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = ax+b$.



Jakie znaki mają współczynniki a i b?

A. $a < 0$ i $b < 0$ **B.** $a < 0$ i $b > 0$ **C.** $a > 0$ i $b < 0$ **D.** $a > 0$ i $b > 0$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja liniowa jest malejąca, to otrzymujemy, że $a < 0$.
Ponieważ prosta przecina oś OY w punkcie o ujemnej rzędnej, to otrzymujemy, że $b < 0$.

Zadanie 10. (*1 pkt*)

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2} \leqslant \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$ jest

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

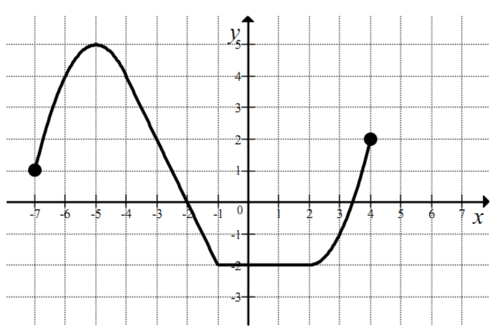
Rozwiązanie:

$$\frac{x}{2} \leqslant \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \quad / \cdot 12$$
$$6x \leqslant 8x + 3$$
$$-2x \leqslant 3$$
$$x \geqslant -\frac{3}{2}$$
$$x \in \left\langle -\frac{3}{2};\ \infty \right)$$

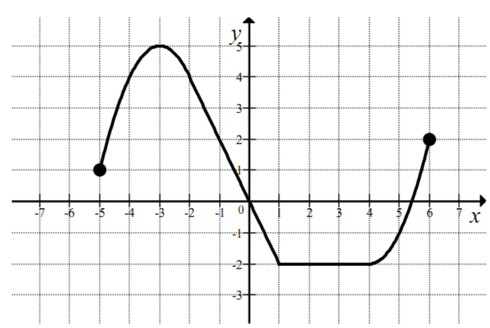
Najmniejsza liczba całkowita spełniająca tę nierówność to $x = -1$.

Zadanie 11. (*1 pkt*)

Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7; 4 \rangle$.



Rys. 1



Rys. 2

Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji

A. $y = f(x+2)$ **B.** $y = f(x) - 2$ **C.** $y = f(x-2)$ **D.** $y = f(x) + 2$

Rozwiązanie:

$y = f(x-2)$, ponieważ wykres funkcji $y = f(x)$ jest przesunięty dwie jednostki w prawo.

Zadanie 12. (*1 pkt*)

Ciąg $(27, 18, x+5)$ jest geometryczny. Wtedy

A. $x = 4$ **B.** $x = 5$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 9$

Rozwiązanie:

Obliczamy iloraz ciągu:

$$q = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

Wtedy:

$$q = \frac{x+5}{18}$$
$$18q = x + 5$$
$$18 \cdot \frac{2}{3} = x + 5$$
$$12 = x + 5$$
$$x = 7$$

Zadanie 13. (*1 pkt*)

Ciąg (a_n) określony dla $n \geqslant 1$ jest arytmetyczny oraz $a_3 = 10$ oraz $a_4 = 14$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $a_1 = -2$ **B.** $a_1 = 2$ **C.** $a_1 = 6$ **D.** $a_1 = 12$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy różnicę ciągu: $r = a_4 - a_3 = 14 - 10 = 4$.
Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ dla $n = 3$ w celu obliczenia a_1:

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$10 = a_1 + 2 \cdot 4$$
$$10 = a_1 + 8$$
$$a_1 = 2$$

Zadanie 14. (*1 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 2$ jest równa

A. $-\frac{7}{4}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązanie:

Z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy:

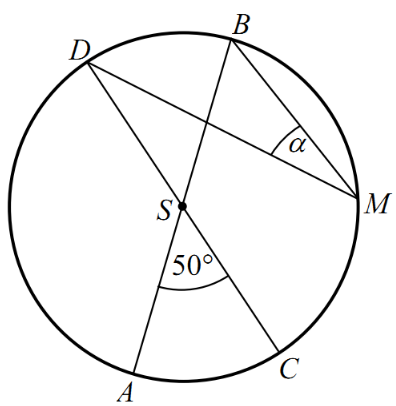
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Stąd:

$$\cos^2\alpha - 2 = \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{7}{4}$$

Zadanie 15. (*1 pkt*)

Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem 50° (tak jak na rysunku).



Miara kąta α jest równa

A. 25° **B.** 30° **C.** 40° **D.** 50°

Rozwiązanie:

Mamy $|\angle DSB| = |\angle ASC| = 50^\circ$ gdyż są to kąty wierzchołkowe.
Stąd $|\angle DMB| = \frac{1}{2}|\angle DSB| = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ$ (kąt wpisany oparty na tym samym łuku co kąt środkowy jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego).

Zadanie 16. (*1 pkt*)

Liczba rzeczywistych rozwiązań równania $(x+1)(x+2)(x^2+3) = 0$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Rozwiązanie:

$$(x+1)(x+2)(x^2+3) = 0$$
$$x+1=0 \ \lor \ x+2=0 \ \lor \ x^2+3=0$$
$$x=-1 \ \lor \ x=-2 \ \lor \ x^2=-3$$
$$x=-1 \ \lor \ x=-2 \ \lor \ x \in \emptyset$$
$$x=-1 \ \lor \ x=-2$$

Zatem mamy dwa rzeczywiste rozwiązania.

Zadanie 17. (*1 pkt*)

Punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -2)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami rombu $ABCD$. Obwód tego rombu jest równy

A. $\sqrt{13}$ **B.** 13 **C.** 676 **D.** $8\sqrt{13}$

Rozwiązanie:

Ze wzoru na długość odcinka:

$$|AB| = \sqrt{(-1-5)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

Obwód rombu jest równy: $Ob = 4 \cdot |AB| = 4 \cdot 2\sqrt{13} = 8\sqrt{13}$.

Zadanie 18. (*1 pkt*)

Punkt $S = (-4, 7)$ jest środkiem odcinka PQ, gdzie $Q = (17, 12)$. Zatem punkt P ma współrzędne

A. $P = (2, -25)$ **B.** $P = (38, 17)$ **C.** $P = (-25, 2)$ **D.** $P = (-12, 4)$

Rozwiązanie:
Niech $P = (p_1, p_2)$. Ponieważ S jest środkiem odcinka PQ, to:

$$\begin{cases} \dfrac{17 + p_1}{2} = -4 \\ \\ \dfrac{12 + p_2}{2} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17 + p_1 = -8 \\ 12 + p_2 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = -25 \\ p_2 = 2 \end{cases}$$

Zatem $P = (-25, 2)$.

Zadanie 19. (*1 pkt*)

Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ oraz $x^2 + y^2 = 10$ jest równa

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{10} - 3$ **C.** 3 **D.** 5

Rozwiązanie:
Środek okręgu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ to $S_1(-1, 2)$.
Środek okręgu $x^2 + y^2 = 10$ to $S_2(0, 0)$.
Ze wzoru na odległość między punktami:

$$|S_1S_2| = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Zadanie 20. (*1 pkt*)

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 10 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest

A. czworokąt **B.** pięciokąt **C.** sześciokąt **D.** dziesięciokąt

Rozwiązanie:
Niech n będzie liczbą ścian bocznych. Wtedy podstawa jest n-kątem. Każda krawędź jest krawędzią podstawy albo krawędzią boczną.

Krawędzi podstawy jest $2 \cdot n$ (dwie podstawy), a krawędzi bocznych też n (z każdego wierzchołka podstawy wychodzi jedna krawędź boczna). Wszystkich krawędzi jest $2n + n = 3n$.
Z treści zadania mamy zależność:

$$3n = 10 + n$$

$$2n = 10$$

$$n = 5$$

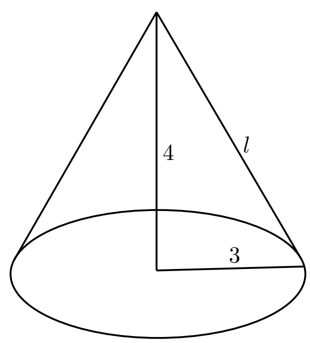
Zadanie 21. (*1 pkt*)

Pole powierzchni bocznej stożka o wysokości 4 i promieniu podstawy 3 jest równe

A. 9π **B.** 12π **C.** 15π **D.** 16π

Rozwiązanie:

Niech h oznacza wysokość stożka, a r oznacza promień podstawy. Z warunków zadania mamy, że $h = 4$, $r = 3$.



Z twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 + r^2 = l^2$$

$$4^2 + 3^2 = l^2$$

$$16 + 9 = l^2$$

$$l^2 = 25$$

$$l = 5$$

Pole powierzchni bocznej jest równe:

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$$

Zadanie 22. (*1 pkt*)
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 5. Wtedy:

A. $p = \frac{1}{36}$ **B.** $p = \frac{1}{18}$ **C.** $p = \frac{1}{12}$ **D.** $p = \frac{1}{9}$

Rozwiązanie:

Wszystkich zdarzeń jest $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36$ (ponieważ przy pierwszym oraz przy drugim rzucie mamy po 6 możliwości).
Niech A oznacza zdarzenie, że iloczyn wyrzuconych oczek jest 5. Zdarzenia A: $A = \{(1,5)\ ,\ (5,1)\}$, czyli $\overline{\overline{A}} = 2$.
Obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Zadanie 23. (*1 pkt*)
Liczba $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ jest równa

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $\sqrt{10}-\sqrt{6}$

Rozwiązanie:

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{25}-\sqrt{9})}{\sqrt{2}} = \sqrt{25}-\sqrt{9} = 5-3 = 2$$

Zadanie 24. (*1 pkt*)
Mediana uporządkowanego niemalejąco zestawu sześciu liczb: $1, 2, 3, x, 5, 8$ jest równa 4. Wtedy

A. $x = 2$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 5$

$Me = \frac{3+x}{2}$ oraz $Me = 4$, więc:

$$\frac{3+x}{2} = 4$$
$$3 + x = 8$$
$$x = 5$$

Zadanie 25. (*1 pkt*)

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 7 jest równa $28\sqrt{3}$. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16

Pole podstawy: $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, wysokość $H = 7$ oraz objętość $V = 28\sqrt{3}$. Zachodzi wzór:

$$V = P_p \cdot H$$

$$28\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 7 \qquad / \cdot 4$$

$$112\sqrt{3} = 7a^2\sqrt{3} \qquad / : \sqrt{3}$$

$$112 = 7a^2$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4$$

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$.

Rozwiązanie:

Stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$x^2(x+2) - 8(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2-8) = 0$$

$$x+2 = 0 \ \vee \ x^2 - 8 = 0$$

$$x+2 = 0 \ \vee \ x = \sqrt{8} \ \vee \ x = -\sqrt{8}$$

Ponieważ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ więc ostateczna odpowiedź to:

$$x = -2 \ \vee \ x = 2\sqrt{2} \ \vee \ x = -2\sqrt{2}$$

Zadanie 27. (*2 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Rozwiązanie:

Stosując wzór $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ do wyrażenia w treści zadania dostajemy:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha &= \sin^2\alpha - 3(1-\sin^2\alpha) \\ &= \sin^2\alpha - 3 + 3\sin^2\alpha \\ &= 4\sin^2\alpha - 3 \end{aligned}$$

Wstawiając wartość $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ do otrzymanego wyrażenia otrzymujemy:

$$4\sin^2\alpha - 3 = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 = 4\cdot\frac{3}{4} - 3 = 0$$

Zatem $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

Zadanie 28. (2 *pkt*)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + zx \leq 0$.
Można skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Rozwiązanie:

Podnosząc do kwadratu równość $x+y+z = 0$ dostajemy, że $(x+y+z)^2 = 0$. Stosując tożsamość z treści zadania mamy:

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Otrzymaną równość można zapisać w postaci:

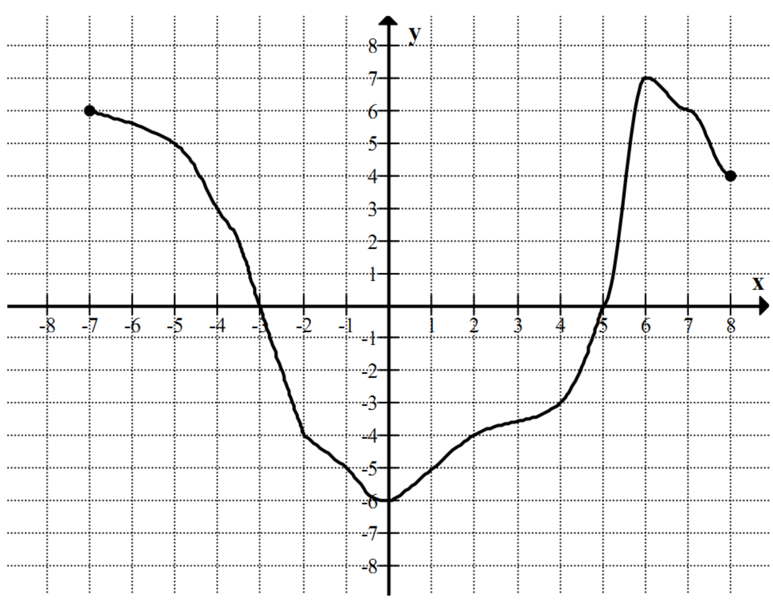
$$xy + xz + yz = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny więc suma $x^2 + y^2 + z^2$ jest liczbą nieujemną. Stąd

$$xy + xz + yz = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \leq 0$$

Zadanie 29. (2 *pkt*)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x)$ określonej dla $\langle -7, 8\rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) największą wartość funkcji f,

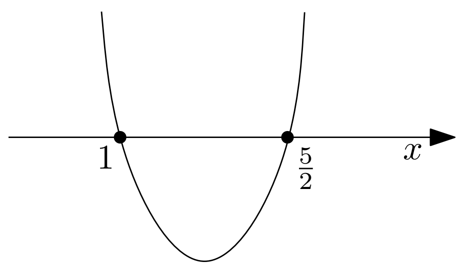
b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

Rozwiązanie:
Z wykresu odczytujemy, że największa wartość funkcji f wynosi 7, a zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ jest zbiór $(-3, 5)$.

Zadanie 30. (*2 pkt*)
Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

Rozwiązanie:
Wyznacznik trójmianu wynosi $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9$, a więc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$.
Obliczymy pierwiastki równania $2x^2 - 7x + 5 = 0$. Mamy:

$$x_1 = \frac{7+3}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{7-3}{2 \cdot 2} = 1$$



Współczynnik a jest dodatni, a więc parabola ma ramiona skierowane do góry. Tym samym widzimy, że rozwiązaniem nierówności jest $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$.

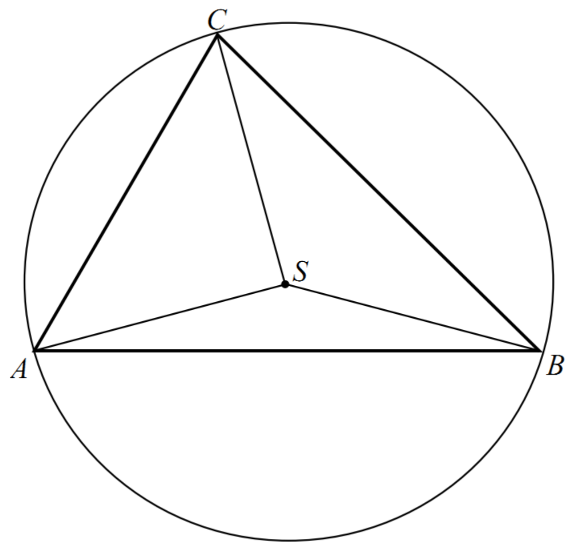
Zadanie 31. (*2 pkt*)
Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie:
Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} 6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98} &= 6^{98}(6^2 - 2 \cdot 6 + 10) \\ &= 6^{98}(36 - 12 + 10) \\ &= 6^{98} \cdot 34 \\ &= (2 \cdot 6^{98}) \cdot 17 \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że dana liczba jest podzielna przez 17.

Zadanie 32. (*4 pkt*)
Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.



Rozwiązanie:

Niech $|\angle BAS| = \alpha$ Z warunków zadania mamy:

$$\begin{aligned} |\angle ACS| &= 3\alpha \\ |\angle CBS| &= 2\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zatem $|AS| = |BS| = |CS|$. Stąd trójkąty ACS, BCS, ABS są równoramienne, a więc:

$$\begin{aligned} |\angle CAS| &= |\angle ACS| \\ |\angle BCS| &= |\angle CBS| \\ |\angle ABS| &= |\angle BAS| \end{aligned} \tag{2}$$

Z faktu, że sumą kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi $180°$ mamy dla trójkąta ABC:

$$|\angle CAS| + |\angle ACS| + |\angle BCS| + |\angle CBS| + |\angle ABS| + |\angle BAS| = 180°$$

Podstawiając do tej równości zależności (2) i (1) otrzymujemy kolejno:

$$\begin{gathered} 2|\angle ACS| + 2|\angle CBS| + 2|\angle BAS| = 180° \\ 6\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180° \\ 12\alpha = 180° \\ \alpha = 15° \end{gathered}$$

Mamy zatem:

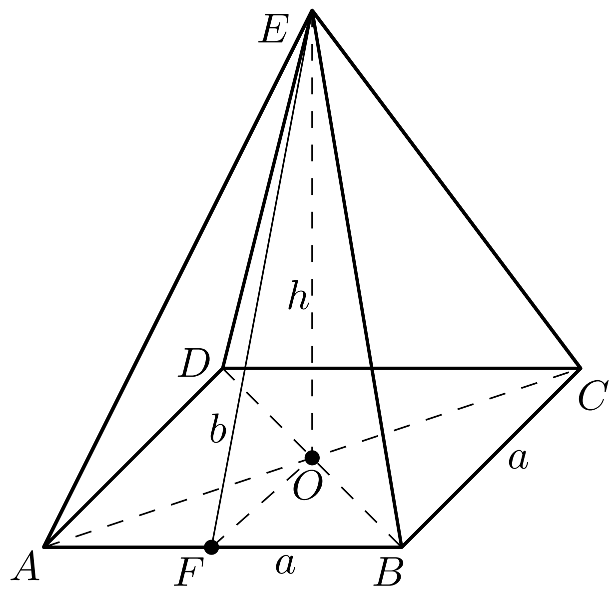
$$\begin{aligned} |\angle ABC| &= |\angle ABS| + |\angle CBS| = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = 45° \\ |\angle BAC| &= |\angle BAS| + |\angle CAS| = \alpha + 3\alpha = 4\alpha = 60° \\ |\angle ACB| &= |\angle ACS| + |\angle BCS| = 3\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 75° \end{aligned}$$

Zadanie 33. (*4 pkt*)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe $100\ cm^2$, a jego pole powierzchni bocznej jest równe $260\ cm^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia tak jak na rysunku.



Dany ostrosłup jest prawidłowy więc punkt O, spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka E, leży na przecięciu przekątnych AC, BD kwadratu $ABCD$. Podobnie ściany boczne w ostrosłupie prawidłowym są trójkątami równoramiennymi, więc punkt F, spodek wysokości ściany bocznej ABE, leży w połowie odcinka AB. Niech a oznacza długość boku kwadratu $ABCD$, b wysokość ściany bocznej i h wysokość ostrosłupa.

Pole podstawy jest równe $P_p = a^2$, a więc $a^2 = 100\ cm^2$ czyli $a = 10\ cm$.
Pole powierzchni bocznej jest równe $P_b = 4 \cdot \frac{1}{2}ab$, zatem $2b \cdot 10\ cm = 260\ cm^2$ stąd $b = 13\ cm$.
Trójkąty AFO i ABC są podobne, gdyż $|\angle FAO| = |\angle BAC|$ oraz $|\angle AFO| = |\angle ABC|$ (cecha kkk). Stąd:

$$\frac{|FO|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$

Zatem $|FO| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{a}{2} = 5\ cm$.
Obliczymy h. Trójkąt EFO jest prostokątny, stąd, na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy $|FO|^2 + h^2 = b^2$. Tym samym otrzymujemy równanie $25\ cm^2 + h^2 = 169\ cm^2$, zatem $h^2 = 144\ cm^2$, a więc $h = 12\ cm$.
Objętość ostrosłupa wynosi $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12\ cm^3 = 100 \cdot 4\ cm^3 = 400\ cm^3$.

Zadanie 34. (*5 pkt*)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Rozwiązanie:

Oznaczenia:
s - długość drogi łączącej oba miasta
t_1 - czas jaki potrzebuje pierwszy pociąg na przebycie drogi łączącej oba miasta
t_2 - czas jaki potrzebuje drugi pociąg na przebycie drogi łączącej oba miasta
v_1 - średnia prędkość pierwszego pociągu
v_2 - średnia prędkość drugiego pociągu
Z treści zadania mamy następujące dane i równania:
$s = 336\ km$,
$t_1 = t_2 - 40\ min$
$v_1 = v_2 + 9\ km/h$
Zamieniając minuty na godziny mamy następujące równania:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 - \frac{2}{3} \\ v_1 = v_2 + 9 \end{cases}$$

Stosując wzór na prędkość średnią mamy: $v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{336}{t_1}$ i $v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{336}{t_2}$. Wstawiając do naszego układu równań dostajemy:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 - \frac{2}{3} \\ \frac{336}{t_1} = \frac{336}{t_2} + 9 \end{cases}$$

Mnożąc drugie równanie przez $t_1 t_2$ i wstawiając do niego pierwsze równanie otrzymujemy:

$$336t_2 = 336t_1 + 9t_1t_2$$

$$336t_2 = 336(t_2 - \frac{2}{3}) + 9(t_2 - \frac{2}{3})t_2$$

$$336t_2 = 336t_2 - 224 + 9t_2^2 - 6t_2$$

$$9t_2^2 - 6t_2 - 224 = 0$$

Oznacza to, że t_2 spełnia równanie:

$$9x^2 - 6x - 224 = 0$$

Rozwiązania szukamy obliczając wyznacznik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 36 + 4 \cdot 224 \cdot 9 = 36 + 36 \cdot 224 = 36(1 + 224) = 36 \cdot 225 = (6 \cdot 15)^2 = 90^2$$

Stąd $\sqrt{\Delta} = 90$ i pierwiastki tego równania wynoszą odpowiednio:

$$x_1 = \frac{6 + 90}{2 \cdot 9} = \frac{96}{18} = \frac{16}{3}$$

$$x_2 = \frac{6 - 90}{2 \cdot 9} = -\frac{84}{18} = -\frac{14}{3}$$

Ponieważ t_2 jest czasem podróży więc musi być liczbą nieujemną. Zatem $t_2 = \frac{16}{3}\ h$ i $t_1 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}\ (h)$. Mamy

$$v_1 = \frac{336}{\frac{14}{3}} = 72\ km/h$$

$$v_2 = v_1 - 9 = 63\ km/h$$

Stąd pierwszy pociąg podróżuje ze średnią prędkością $72\ km/h$, a drugi ze średnią prędkością $63\ km/h$.